

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
И.о. заведующего кафедрой
математического анализа
Шабров С.А.



01.07.2021

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.09 Элементы выпуклого анализа**

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

02.04.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки/специализация:

Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении

3. Квалификация выпускника: магистр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра математического анализа

6. Составители программы: Колесникова Инна Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математического анализа

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета, протокол №0500-07 от 29.06.2021

8. Учебный год: 2022/2023

Семестр(ы): 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

Освоение основных методов выпуклого анализа, необходимых для изучения дисциплин общенаучного и профессионального циклов; развитие логического и алгоритмического мышления; повышение общей математической культуры; формирование навыков формализации моделей реальных процессов; анализа систем, процессов и явлений при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений; выработка исследовательских навыков и умений самостоятельного анализа прикладных задач, а также оценки последствий своей деятельности при разработке различных проектов.

Задачи дисциплины:

Изучение теоретических основ выпуклого анализа, приемов и методов исследования и решения математически и логически формализованных задач с помощью положений выпуклого анализа; формирование культуры мышления, умения демонстрировать базовые знания выпуклого анализа, и приобретать новые научные и профессиональные знания по выпуклому анализу; формирование навыков анализа фундаментальных и прикладных теорий, концепций, фактов, а также построения математических моделей изучаемых процессов и последствий их использования с помощью методов выпуклого анализа.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Элементы выпуклого анализа» относится к части Блока 1, формируемой участниками образовательных отношений основной образовательной программы направления подготовки 02.04.01 Математика и компьютерные науки - Магистр.

Курс является логическим продолжением преподавания предметов: «Математический анализ», «Алгебра», и осуществляет разумный баланс между общеобразовательным содержанием выбранного профиля и его дальнейшей профессиональной направленностью, что, несомненно, повышает профессиональное самоопределение учащихся и уровень их социальной адаптации. Курс имеет важное значение для задач линейного и нелинейного программирования, теории игр и теории оптимального управления. Цель данного курса состоит в том, чтобы научить студентов работать с выпуклыми функциями и выпуклыми множествами.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

| Код | Название компетенции | Код(ы) | Индикатор(ы) | Планируемые результаты обучения |
|------|--|--------|--|--|
| ПК-1 | Способен проводить работы по сбору, обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического моделирова- | ПК-1.1 | Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий | Знать: основные положения и законы теории выпуклого анализа; основные понятия, методы и приемы выпуклого анализа Уметь: ориентироваться в справочной и научной литературе по выпуклому анализу Владеть: умением читать и анализировать учебную литературу; способностью с помощью понятий выпуклого анализа интерпретировать и коммен- |

| | | | | |
|------|--|--------|--|---|
| | <p>ния физических и экономических процессов методами математического анализа, а также реализовывать соответствующие математические алгоритмы программно</p> | | | <p>тировать получаемую информацию</p> |
| ПК-2 | <p>Способен анализировать, систематизировать и обобщать передовой отечественный и международный опыт в области математического и компьютерного моделирования различных процессов</p> | ПК-2.2 | <p>Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой</p> | <p>Знать: приемы построения моделей реальных процессов методами выпуклого анализа</p> <p>Уметь: использовать знания фундаментальных основ, подходы и методы выпуклого анализа в обучении и профессиональной деятельности, в интегрировании имеющихся знаний, наращивании накопленных знаний; применять методы выпуклого анализа в профессиональной деятельности</p> <p>Владеть: инструментарием выпуклого анализа для решения задач в своей предметной области; навыками решения задач и проблем из различных областей математики, которые требуют знаний из теории выпуклого анализа</p> |
| ПК-3 | <p>Способен осуществлять разработки планов и методических программ проведения исследований и разработок</p> | ПК-3.2 | <p>Умеет применять навыки методической и экспертной работы</p> | <p>Знать: фундаментальные основы выпуклого анализа, которые будут использоваться в профессиональной деятельности</p> <p>Уметь: использовать математическую логику и культуру мышления, характерные для выпуклого анализа, при формировании суждений по соответствующим профессиональным проблемам; строить математические модели исследуемых процессов</p> <p>Владеть: методами выпуклого анализа и моделирования при решении профессиональных задач</p> |

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) — 2/72.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) зачет.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

| Вид учебной работы | | Трудоемкость | | |
|--|--------------|--------------|--------------|------------|
| | | Всего | По семестрам | |
| | | | 4 семестр | № семестра |
| Контактная работа | | 40 | 40 | |
| в том числе: | лекции | 20 | 20 | |
| | практические | 20 | 20 | |
| | лабораторные | | | |
| Самостоятельная работа | | 32 | 32 | |
| в том числе: курсовая работа (проект) | | | | |
| Форма промежуточной аттестации (зачёт) | | | | |
| Итого: | | 72 | 72 | |

13.1. Содержание дисциплины

| п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины |
|--------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1. Лекции | | |
| 1.1 | Основные понятия выпуклого анализа | Аффинные множества. Выпуклые множества и конусы. Алгебра выпуклых множеств. Выпуклые функции. Операции над функциями. Относительная внутренность выпуклых множеств. Замыкание выпуклых множеств, Рецессивные конусы. Непрерывность выпуклых функций |
| 1.2 | Теория двойственности | Теоремы отделимости. Сопряженные выпуклые функции. Опорные функции. Поляры выпуклых множеств и функций |
| 1.3 | Дифференцирование | Производные по направлению и субградиенты. Субдифференциалы. Дифференцируемость выпуклых функций |
| 1.4 | Экстремальные задачи с ограничениями | Минимумы выпуклых функций. Множители Лагранжа. Теорема двойственности Фенхеля. Седловые функции и минимакс |
| 2. Практические занятия | | |
| 2.1 | Основные понятия выпуклого анализа | Аффинные множества. Выпуклые множества и конусы. Алгебра выпуклых множеств. Выпуклые функции. Операции над функциями. Относительная внутренность выпуклых множеств. Замыкание выпуклых множеств, Рецессивные конусы. Непрерывность выпуклых функций |
| 2.2 | Теория двойственности | Теоремы отделимости. Сопряженные выпуклые функции. Опорные функции. Поляры выпуклых множеств и функций |
| 2.3 | Дифференцирование | Производные по направлению и субградиенты. Суб- |

| | | |
|-----|--------------------------------------|--|
| | | дифференциалы. Дифференцируемость выпуклых функций |
| 2.4 | Экстремальные задачи с ограничениями | Минимумы выпуклых функций. Множители Лагранжа. Теорема двойственности Фенхеля. Седловые функции и минимакс |

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/ п | Наименование темы (раздела) дисциплины | Виды занятий (количество часов) | | | | |
|--------------|---|---------------------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
| | | Лекции | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 1 | Основные понятия выпуклого анализа | 4 | 4 | | 6 | 14 |
| 2 | Теория двойственности | 6 | 6 | | 8 | 20 |
| 3 | Дифференцирование | 4 | 4 | | 8 | 16 |
| 4 | Экстремальные задачи с ограничениями | 6 | 6 | | 10 | 22 |
| | Итого: | 20 | 20 | | 32 | 72 |

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе освоения дисциплины студенты должны посетить практические занятия и сдать зачет.

Указания для освоения теоретического и практического материала и сдачи зачета:

1. Обязательное посещение лекционных и практических занятий по дисциплине с конспектированием излагаемого преподавателем материала в соответствии с расписанием занятий.

2. Получение в библиотеке рекомендованной учебной литературы и электронное копирование рабочей программы с методическими рекомендациями, конспекта лекций.

3. Копирование (электронное) перечня вопросов к зачёту по дисциплине, а также списка рекомендованной литературы из рабочей программы дисциплины.

4. При подготовке к практическим занятиям по дисциплине необходимо изучить рекомендованный преподавателем материал, иметь при себе конспекты соответствующих тем и необходимый справочный материал.

5. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации (видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым словам курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к зачёту по дисциплине.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

| № п/п | Источник |
|----------|---|
| 1 | Половинкин, Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М. : Физматлит, 2004.— 416 с. |

| | |
|---|---|
| 2 | Иванов, Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения / Г. Е. Иванов. — М. : Физматлит, 2006. — 351 с. |
|---|---|

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|-------|---|
| 3 | <i>Магарил-Ильев, Г.Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильев, В. М. Тихомиров. — М. : Эдиториал УРСС, 2000. — 176 с.</i> |
| 4 | <i>Рокафеллар, Р. Т. Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. — М : Мир, 1973. — 469 с.</i> |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

| № п/п | Ресурс |
|-------|---|
| 5 | <i>http://www.lib.vsu.ru – официальный сайт библиотеки ВГУ</i> |
| 6 | <i>http://www.math.vsu.ru – официальный сайт математического факультета ВГУ</i> |
| 7 | <i>Поисковые системы www.google.ru, www.yandex.ru</i> |

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

| № п/п | Источник |
|-------|---|
| 1 | Половинкин, Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — М. : Физматлит, 2004.— 416 с. |

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

Перечень необходимого программного обеспечения : Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit, Android, программный пакет LibreOffice 6 (*Calc (электронные таблицы)*)).

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий требуется аудитория-компьютерный класс на группу студентов, оборудованная маркерной и интерактивной доской, мультимедийным проектором с экраном, компьютер преподавателя и персональные компьютеры слушателей с подключением к Internet.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|---|--|----------------------|-------------------------------------|---|
| 1. | Основные понятия выпуклого анализа | ПК-1 ПК-2 | ПК - 1.1 ПК - 2.2 | Промежуточная аттестация – Домашняя работа 1 |
| 2. | Теория двойственности | ПК-1 ПК-2 | ПК - 1.1 ПК - 2.2 | Промежуточная аттестация – Домашняя работа 2 |
| 3. | Дифференцирование | ПК-1 ПК-2 ПК-3 | ПК - 1.1 ПК - 2.2 ПК - 3.2 | Промежуточная аттестация – Контрольная работа 1 |
| 4. | Экстремальные задачи с ограничениями | ПК-1 ПК-2 ПК-3 | ПК - 1.1 ПК - 2.2 ПК - 3.2 | Промежуточная аттестация – Контрольная работа 2 |
| Промежуточная аттестация форма контроля - зачет | | | | Домашние и контрольные работы |

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в форме выполнения домашних и контрольных работ.

Домашняя работа № 1.

Будет ли выпуклой функция $f(x) = \text{sign}(\sin x)$.

Домашняя работа № 2.

Построить опорную функцию множества $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Контрольная работа № 1.

Проверить выпуклость множества $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2^2 \leq 0, -x_1^2 + x_2 \leq 0\}$.

Контрольная работа № 2.

Исследовать на экстремум функцию $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1 \cdot x_2 - 2x_2^2$.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний

Вопросы к зачету:

1. Выпуклое множество. Элементарные свойства (пересечение, сумма, образ и прообраз, проекция). Выпуклая оболочка. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компакта.
2. Внутренность и замыкание выпуклого множества. Размерность выпуклого множества. Непустота относительной внутренней выпуклого множества.
3. Теоремы об отделимости (точки от выпуклого множества, двух выпуклых множеств, компакта от выпуклого множества). Существование опорного функционала в граничной точке выпуклого множества.
4. Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном. Сопряженный конус к полупространству, к сумме конусов.
5. Крайние точки выпуклого множества. Теорема Минковского о представлении выпуклого компакта в виде выпуклой оболочки множества своих крайних точек.
6. Выпуклые функции. Определение с помощью надграфика и с помощью неравенства Йенсена. Сумма и максимум выпуклых функций. Восстановление функции по ее надграфику.
7. Опорная и индикаторная функции множества, функция Минковского и их выпуклость. Полунепрерывные снизу функции. Замыкание выпуклой функции.
8. Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.
9. Субдифференциал выпуклой функции в точке. Теорема Моро--Рокафеллара о субдифференциале суммы выпуклых функций.
10. Производная выпуклой функции по направлению. Однородность и выпуклость производной в зависимости от направления. Совпадение субдифференциала выпуклой функции в точке и субдифференциала ее производной по направлениям.
11. Производная по направлению от максимума конечного числа функций. Теорема Дубо-вицкого--Милютинна о субдифференциале максимума выпуклых функций в точке.
12. Сопряженная функция. Неравенство Юнга. Классическое преобразование Лежандра. Сопряженные к сублинейной и к индикаторной функции.
13. Вторая сопряженная функция. Теорема Фенхеля--Моро.
14. Задача о минимуме выпуклой функции на выпуклом множестве. Глобальность локального минимума. Необходимое и достаточное условие минимума.
15. Задача о минимуме выпуклой функции при выпуклых ограничениях. Теорема Куна--Таккера.

| Критерии оценивания компетенций | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|---|--|-------------------|
| <p>Ответ соответствует одному или более чем одному из перечисленных показателей, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует знание учебного материала, возможно с некоторыми ошибками.</p> | <p>Пороговый уровень и выше порогового</p> | <p>зачтено</p> |
| <p>Ответ не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их.</p> | | <p>не зачтено</p> |